DOKTORI ÉRTEKEZÉS ÖSSZEFOGLALÓ

Gráfok optimális kövezési száma

Papp F. László

A gráfkövezés egy gráfokon játszható játék. Saks és Lagarias javasolta egy Erdős által megfogalmazott számelméleti probléma megoldási módjaként, melyet végül Chung alkalmazott először 1989-ben.

Egy G gráf P *kőelosztásán* egy olyan függvényt értünk, amely a gráf minden egyes csúcsához egy nemnegatív egész számot rendel. A $P(v)$ értékre úgy gondolunk, hogy a v csúcsra pontosan ennyi követ helyeztek. A P kőelosztás méretén az összes kő mennyiségét értjük és ezt a mennyiséget $|P|$-vel jelöljük.

Egy *kövezési lépés* levesz két követ egy olyan csúcsról ami legalább két kővel rendelkezik és feltesz egy követ egy szomszédos csúcsra. Egy v csúcs *elérhető* a P kőelosztás alatt, ha van kövezési lépéseknek olyan sorozata, amit ha a P kőelosztásra végrehajtunk, akkor végül a v csúcson található kő.

A G gráfon vett P kőelosztás megoldható, ha G minden egyes csúcsa elérhető P alatt. A G gráf egy kőelosztását akkor nevezzük *optimálisnak*, ha megoldható és a mérete a lehető legkisebb a megoldható elosztások között. A G gráf *optimális kövezési számán* egy optimális kőelosztás méretét értjük és ezt a mennyiséget $\pi_{\mathrm{opt}}(G)$-vel jelöljük.

Milans és Clark bebizonyította, hogy annak eldöntése, hogy egy megadott G gráf és k egész szám esetén $\pi_{\mathrm{opt}}(G) \leq k$ teljesül-e NP-teljes.

A kövezésnek van egy olyan verziója, amit murvázásnak nevezzük. Egy *szigorú murvázási lépés* egy-egy követ vesz le két különböző kővel rendelkező csúcsról és egy követ helyez ezen két csúcs egyik közös szomszédjára. Egy murvázási lépés lehet kövezési lépés vagy szigorú murvázási lépés. Ha az optimális kövezési szám definíciójában mindenhol kicseréljük a kövezési lépést murvázási lépésre, akkor az *optimális murvázási szám* definícióját kapjuk. Ezt a mennyiséget $\rho_{\mathrm{opt}}(G)$-vel jelöljük

Könnyen látható, hogy $\pi_{\mathrm{opt}}(G) \leq 2^{\mathrm{diam}(G)}$. Muntz és társszerzői azt állították, hogy bármely k pozitív egészhez létezik olyan k átmérőjű G gráf, amire $\pi_{\mathrm{opt}}(G) = 2^{\mathrm{diam}(G)}$. Először is megmutajuk, hogy ezen állítás eredeti bizonyítása hibás. Bebizonyítjuk az analóg állítást murázás esetén, azaz bármely pozitív egész k esetén van oylan k átmérőjű gráf, amire $\rho_{\mathrm{opt}}(G) = 2^{\mathrm{diam}(G)}$ teljesül. Továbbá megadunk egy új rövid bizonyítást a kövezéses esetre is. Ehhez a k távolságú domináló számot használjuk, melyet γ_k-val jelölünk. Az így kapott eredményeink: $\pi_{\mathrm{opt}}(G) \geq \rho_{\mathrm{opt}}(G) \geq \min\left(\gamma_{k-1}(G), 2^k\right)$ és $\pi_{\mathrm{opt}}(G) \geq \min\left(2^k, \gamma_{k-1}(G) + 2^{k-2} + 1, \gamma_{k-2}(G) + 1\right)$.

Megmutatjuk, hogy minden $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan G gráf amire $\pi_{\mathrm{opt}}(G) \geq \frac{(4-\epsilon)n}{\delta+1}$, ahol δ a G legkisebb fokszáma, n pedig a G csúcsszáma. Bebizonyítjuk, hogy $\mathrm{diam}(G) \geq 3$ esetén $\pi_{\mathrm{opt}}(G) \leq \frac{15n}{4(\delta+1)}$. Gráfok egy olyan családját konstruáljuk, amelyben vannak tetszőlegesen nagy átmérőjű gráfok és az optimális kövezési számuk legalább $\left(\frac{8}{3} - \epsilon\right) \frac{n}{(\delta+1)}$. Bunde és társszerzői kérdezték, hogy „Milyen nagy lehet $\pi_{\mathrm{opt}}(G)$ ha a minimum fok δ adott?”. Ezen kérdésre az a válaszunk, hogy a $\frac{4n}{\delta+1}$ értéket tetszőlegesen megközelítheti, azonban ezt az értéket nem éri el.

Bevezetünk egy módszert, aminek a segítségével alsó korlátot tudunk adni tetőszleges csúcstranzitív gráf optimális kövezési számára. Jelölje $SG_{m,n}$ az m-szer n-es négyzetrács gráfot. Bebizonyítjuk, hogy $\frac{2}{13}mn \leq \pi_{\mathrm{opt}}(SG_{m,n}) \leq \frac{2}{7}mn + O(m+n)$. Azt sejtjük, hogy a felső korlát éles. Definiáljuk a négyzetrács gráf néhány feszített részgráfját, melyeket lépcső gráfoknak nevezünk. Ezek közül a keskenyeknek meghatározzuk az optimális kövezési számát. Ezen eredmények megerősítik a négyzetrács gráf optimális kövezési számára vonatkozó sejtésünket.

Egy kőelosztást *t-korlátozottnak* nevezünk, ha semelyik csúcs sem tartalmaz t-nél több követ. A G gráf *t-korlátozott* optimalális kövezési száma a legkiseb t-korlátozott megoldható kőelosztás mérete, melyet $\pi_t^*(G)$-vel jelölünk.

Bebizonyítjuk, hogy $t \geq 2$ esetén $\pi_{\mathrm{opt}}(G) = \pi_{\mathrm{opt}}(G \cdot K_m) = \pi_t^*(G \cdot K_m)$, ahol $\cdot$ a lexikografikus gráfszorzatot jelöli. Ezt alkalmazva belátjuk, hogy annak eldöntése, hogy egy G gráf és k egész szám esetén $\pi_t^*(G) \leq k$ teljesül-e NP-teljes. Igazoljuk, hogy ha $\delta(G) \geq \frac{2}{3}n - 1$, akkor $\pi_2^*(G) = \pi_{\mathrm{opt}}(G)$.